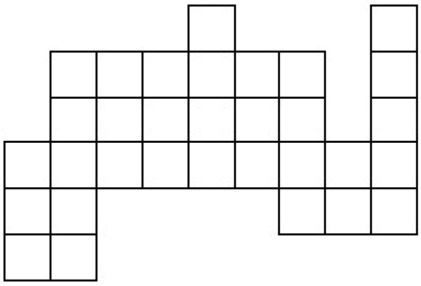
Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 9 класса, 2022–2023 учебный год

1. Дана фигура, составленная из нескольких клеток. Какое наименьшее количество клеток необходимо добавить к этой фигуре, чтобы получился квадрат, внутри которого все клетки заполнены без пропусков?

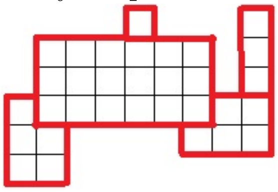


Ответ. 49

Решение. Заметим, что внутри фигуры есть горизонтальный ряд из 9 клеток. Поэтому площадь итогового квадрата не может быть меньше $9 \cdot 9 = 81$. В фигуре 32 клетки, то есть требуется добавить минимум $81 - 32 = 49$ клеток.

С другой стороны, легко видеть, что внутрь квадрата 9×9 фигура помещается целиком.

Комментарий. Найти площадь фигуры можно, например, так. Разрежем фигуру на части, изображенные на рисунке. Тогда площадь всей фигуры будет равна $5 + 5 + 3 \cdot 6 + 3 + 1 = 32$.



2. В пяти корзинах лежат яблоки двух сортов так, что в каждой корзине есть яблоки только одного сорта. Известно, что в первой корзине находится 20 яблок, во второй — 30 , в третьей — 40 , в четвёртой — 60 , в пятой — 90 . После того, как содержимое одной из корзин полностью продали, яблок первого сорта стало в два раза больше, чем яблок второго сорта. Сколько яблок могло быть в проданной корзине? Если ответов несколько, укажите их все.

Ответ. 60 или 90.

Решение. Конечно, можно для каждой корзины попробовать её убрать и посмотреть, можно ли оставшиеся разбить на две группы, подходящих под условие. Мы предложим решение, которое немного сокращает перебор.

Если яблок первого сорта стало в два раза больше яблок второго сорта, то общее количество оставшихся яблок должно делиться на 3. Первоначальное количество яблок равно $20 + 30 + 40 + 60 + 90 = 240$ штук. Так как 240 делится на 3, то количество убранных яблок тоже должно делиться на 3. Поэтому варианты на 20 и 40 яблок не подходят. Если убрали 30 яблок, то яблок второго сорта должно быть $(240 - 30) : 3 = 70$ штук. Но 70 штук нельзя набрать используя корзины на 20, 40 и 60 яблок.

Осталось проверить, что ответы 60 и 90 достигаются. Для этого надо предъявить примеры, как могли быть распределены яблоки по группам (сортам), чтобы количество яблок в одной группе было в два раза больше, чем в другой. Действительно:

- $40 + 60 = 2 \cdot (20 + 30)$, если убрали 90 яблок;
- $30 + 90 = 2 \cdot (20 + 40)$, если убрали 60 яблок.

3. На доске написаны три двузначных числа, одно из которых начинается на 5 , второе — на 6, а третье — на 7 . Учитель попросил трёх учеников, чтобы каждый из них выбрал какие-нибудь два из этих чисел и сложил их. У первого ученика получилось 147 , ответы второго и третьего — различные трёхзначные числа, начинающиеся на 12 . Чему может равняться число, начинающееся на 7? Если ответов несколько, укажите их все.

Ответ. Только 78.

Решение. Начинающееся на 7 число обозначим за a, начинающееся на 6 — за b, начинающееся на 5 — за c. Сумма $a + b \geqslant 70 + 60 = 130$, поэтому она должна быть равна 147. Максимальная сумма чисел, начинающихся на 7 и 6, равна 69+79=148. Число 147 всего на 1 меньше 148, поэтому числа a и b равны 79 и 68 или же 78 и 69.

Покажем, что a не равно 79. Пусть $a = 79$. Сумма $a + c \leqslant 129$, следовательно, $c \leqslant 129 - 79 = 50$. Но тогда сумма $b + c \leqslant 69 + 50 = 119$ — не может начинаться на 12. Значит, a не равно 79.

Следовательно $a = 78$ и $b = 69$. Если взять $c = 51$, то получится набор, подходящий под условие.

Комментарий. В задаче этого не требовалось, но давайте докажем, что кроме $c = 51$ ничего не подходит. Заметим, что c не равно 50, так как иначе сумма $b+c \leqslant 69+50 = 119$ не может начинаться на 12. Так же $c < 52$ так как иначе сумма $a + c \geqslant 78 + 52 = 130$ не может начинаться на 12. Поэтому $c = 51$.

4. В колоде 52 карты. Каждый делает по одному снятию. *Снятие* состоит в том, чтобы взять верхние N карт и положить их вниз колоды, не меняя их порядок.

- Сначала Андрей снял 28 карт,
- затем Борис снял 31 карту,
- затем Ваня снял 2 карты,
- затем Гена снял несколько карт,
- затем Дима снял 21 карту.

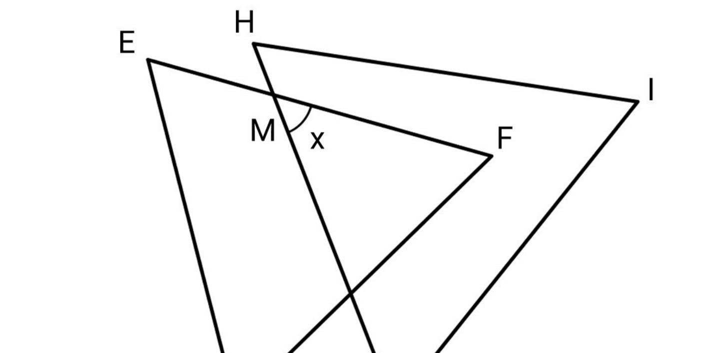
Последнее снятие восстановило первоначальный порядок. Сколько карт снял Гена?

Ответ. 22.

Решение. Снятие N карт даст такой же результат, как и перекладывание N карт по одной сверху вниз. Будем считать, что каждый из ребят перекладывал по одной карте по несколько раз.

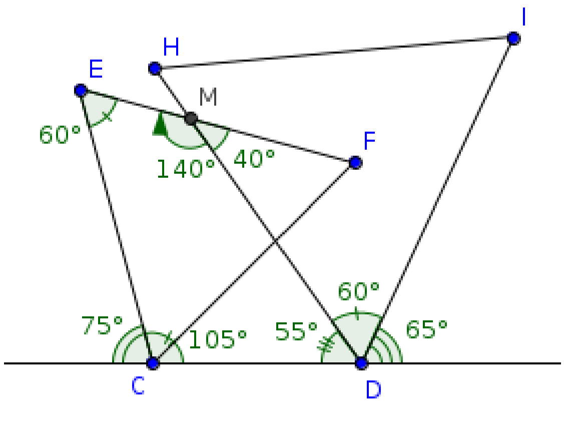
После последнего перекладывания порядок карт вернулся в первоначальное состояние, значит общее количество перекладываний карт было кратно 52. Количество переложенных карт всех ребят, кроме Гены, равно $28+31+2+21 = 82$. До следующего числа кратного 52 не хватает $2 \cdot 52 - 82 = 104 - 82 = 22$ карты.

5. Два равносторонних треугольника CEF и DIH расположены так, как показано на чертеже. На чертеже отмечены величины некоторых углов. Найдите величину угла x. Ответ дайте в градусах.



Ответ. 40.

Решение. Найдем градусные меры углов четырехугольника $CDME$:



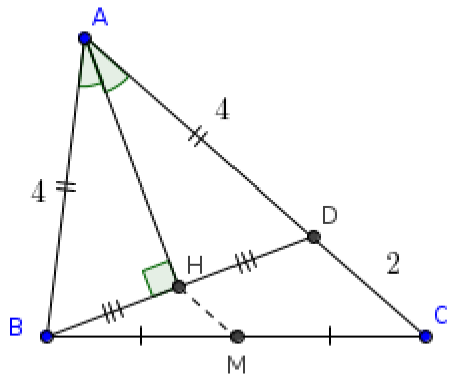
- $\angle CEM = 60°$: это угол равностороннего треугольника CEF;
- $\angle ECD = 180° - 75° = 105°$: угол $\angle ECD$ — смежный к углу $75°$;
- $\angle CDM = 180° - 60° - 65° = 55°$: угол $\angle CDM$ — смежный к углу, состоящему из угла $\angle HDI$, который равен $60°$, так как является углом равностороннего треугольника, и угла в $65°$;
- $\angle EMD = 360° - 60° - 105° - 55° = 140°$: сумма углов четырёхугольника $CEMD$ равна $360°$.

Искомый угол — смежный с углом $\angle EMD$, поэтому равен $180° - 140° = 40°$.

6. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 6$. Точка M — середина отрезка BC, а точка H — основание перпендикуляра, опущенного из B на биссектрису угла A. Найдите длину отрезка HM. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. 1.

Решение. Пусть D — точка пересечения прямой BH с прямой AC. Треугольник ABD равнобедренный, так как в нем совпадает биссектриса и высота из вершины A. Следовательно, H — середина отрезка BD. Тогда HM — средняя линия треугольника BCD. Заметим, что $CD = AC - AD = AC - AB = 6 - 4 = 2$, откуда $HM = CD/2 = 1$.



7. На доске были написаны числа a, b и c . Их стёрли, а взамен записали числа $a - 1$, $b + 1$, c^2. После этого оказалось, что на доске написаны те же числа, что и вначале (возможно, в другом порядке). Какие значения может принимать число a, если известно, что сумма чисел a, b и c равна 2005? Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. 1003 или 1002,5.

Решение. Сумма всех чисел не меняется, поэтому $a + b + c = (a - 1) + (b + 1) + c^2$. Откуда $c^2 = c$, следовательно $c = 1$ или $c = 0$. В обоих случаях число c равно числу c^2, тогда число a будет равно числу $b + 1$ (а число b — числу $a - 1$).

Если $c = 1$, то $a + b = 2004$. Откуда $(b + 1) + b = 2004$, $b = (2004 - 1)/2 = 1001{,}5$ и $a = b + 1 = 1002{,}5$.

Если $c = 0$, то $a + b = 2005$. Откуда $(b + 1) + b = 2005$, $b = (2005 - 1)/2 = 1002$ и $a = b + 1 = 1003$.

8. Школьный этап олимпиады по магии и волшебству состоит из 5 заклинаний. Из 100 юных волшебников, принимавших участие в соревновании,

- 95 правильно выполнили 1-е заклинание,
- 75 правильно выполнили 2-е заклинание,
- 97 правильно выполнили 3-е заклинание,
- 95 правильно выполнили 4-е заклинание,
- 96 правильно выполнили 5-е заклинание.

Какое наименьшее количество школьников могло правильно выполнить ровно 4 из 5 заклинаний при описанных условиях?

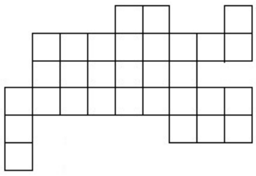
Ответ. 8.

Решение. Количество школьников, которые выполнили все заклинания правильно, не больше 75, так как только 75 школьников выполнили правильно второе заклинание. Количество школьников, которые ошиблись в 1-ом, 3-ем, 4-ом или 5-ом заклинаниях, не более $(100-95)+(100-97)+(100-95)+(100-96) = 5+3+5+4 = 17$. Если школьник ошибся хотя бы в двух заклинаниях, то он точно ошибся в каком-то заклинании, отличном от второго. Следовательно, количество школьников, которые ошиблись хотя бы в двух заклинаниях не превышает 17. Тогда искомое количество школьников не менее $100-75-17 = 8$.

Осталось показать, что такое количество школьников бывает. Действительно, пусть первые 25 школьников ошиблись во втором заклинании. Из них пятеро ошиблись в первом, трое — в третьем, пятеро — в четверном, четверо — в пятом. Так как $5+3+5+4 = 17$ меньше 25, то эти 17 школьников могут быть различными.

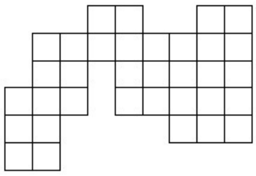
Информация о других клонах

1. Дана фигура, составленная из нескольких клеток. Какое наименьшее количество клеток необходимо добавить к этой фигуре, чтобы получился квадрат, внутри которого все клетки заполнены без пропусков?



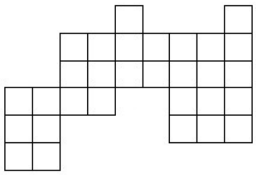
Ответ. 50.

1. Дана фигура, составленная из нескольких клеток. Какое наименьшее количество клеток необходимо добавить к этой фигуре, чтобы получился квадрат, внутри которого все клетки заполнены без пропусков?



Ответ. 47.

1. Дана фигура, составленная из нескольких клеток. Какое наименьшее количество клеток необходимо добавить к этой фигуре, чтобы получился квадрат, внутри которого все клетки заполнены без пропусков?



Ответ. 51.

2. В пяти корзинах лежат яблоки двух сортов так, что в каждой корзине есть яблоки только одного сорта. Известно, что в первой корзине находится 30 яблок, во второй — 40 , в третьей — 50 , в четвёртой — 70, в пятой — 90 . После того, как содержимое одной из корзин полностью продали, яблок первого сорта стало в два раза больше, чем яблок второго сорта. Сколько яблок могло быть в проданной корзине?

Если ответов несколько, укажите их все.

Ответ. 40 или 70.

2. В пяти корзинах лежат яблоки двух сортов так, что в каждой корзине есть яблоки только одного сорта. Известно, что в первой корзине находится 20 яблок, во второй — 40 , в третьей — 50 , в четвёртой — 70, в пятой — 100. После того, как содержимое одной из корзин полностью продали, яблок первого сорта стало в два раза больше, чем яблок второго сорта. Сколько яблок могло быть в проданной корзине?

Если ответов несколько, укажите их все.

Ответ. 70 или 100.

2. В пяти корзинах лежат яблоки двух сортов так, что в каждой корзине есть яблоки только одного сорта. Известно, что в первой корзине находится 30 яблок, во второй — 50 , в третьей — 60, в четвёртой — 80, в пятой — 100. После того, как содержимое одной из корзин полностью продали, яблок первого сорта стало в два раза больше, чем яблок второго сорта. Сколько яблок могло быть в проданной корзине?

Если ответов несколько, укажите их все.

Ответ. 50 или 80.

3. На доске написаны три двузначных числа, одно из которых начинается на 5 , второе — на 6, а третье — на 7 . Учитель попросил трёх учеников, чтобы каждый из них выбрал какие-нибудь два из этих чисел и сложил их. У первого ученика получилось 111, ответы второго и третьего — различные трёхзначные числа, начинающиеся на 13. Чему может равняться число, начинающееся на 7?

Если ответов несколько, укажите их все.

Ответ. Только 79.

3. На доске написаны три двузначных числа, одно из которых начинается на 4, второе — на 5, а третье — на 6. Учитель попросил трёх учеников, чтобы каждый из них выбрал какие-нибудь два из этих чисел и сложил их. У первого ученика получилось 127, ответы второго и третьего — различные трёхзначные числа, начинающиеся на 10. Чему может равняться число, начинающееся на 6?

Если ответов несколько, укажите их все.

Ответ. Только 68.

3. На доске написаны три двузначных числа, одно из которых начинается на 6, второе — на 7, а третье — на 8. Учитель попросил трёх учеников, чтобы каждый из них выбрал какие-нибудь два из этих чисел и сложил их. У первого ученика получилось 131, ответы второго и третьего — различные трёхзначные числа, начинающиеся на 15. Чему может равняться число, начинающееся на 7?

Если ответов несколько, укажите их все.

Ответ. Только 70.

4. В колоде 52 карты. Каждый делает по одному снятию. *Снятие* состоит в том, чтобы взять верхние N карт и положить их вниз колоды, не меняя их порядок.

- Сначала Андрей снял 26 карт,
- затем Борис снял 28 карт,
- затем Ваня снял 6 карт,
- затем Гена снял несколько карт,
- затем Дима снял 26 карт.

Последнее снятие восстановило первоначальный порядок. Сколько карт снял Гена?

Ответ. 18.

4. В колоде 52 карты. Каждый делает по одному снятию. *Снятие* состоит в том, чтобы взять верхние N карт и положить их вниз колоды, не меняя их порядок.

- Сначала Андрей снял 23 карты,
- затем Борис снял 25 карт,
- затем Ваня снял 11 карты,
- затем Гена снял несколько карт,
- затем Дима снял 25 карт.

Последнее снятие восстановило первоначальный порядок. Сколько карт снял Гена?

Ответ. 20.

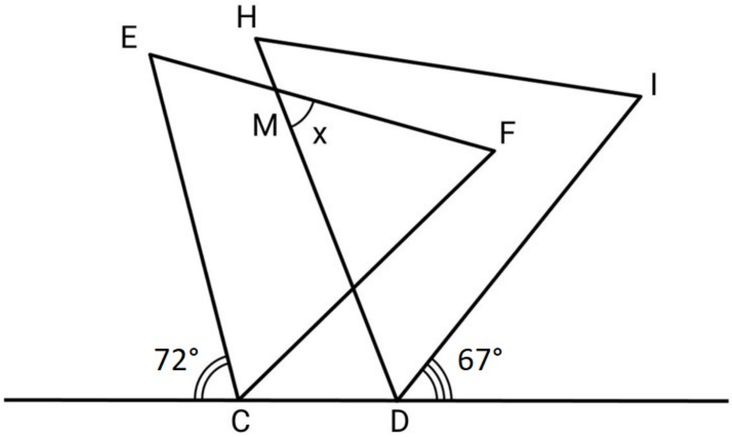
4. В колоде 52 карты. Каждый делает по одному снятию. *Снятие* состоит в том, чтобы взять верхние N карт и положить их вниз колоды, не меняя их порядок.

- Сначала Андрей снял 17 карт,
- затем Борис снял 12 карт,
- затем Ваня снял 35 карт,
- затем Гена снял несколько карт,
- затем Дима снял 24 карты.

Последнее снятие восстановило первоначальный порядок. Сколько карт снял Гена?

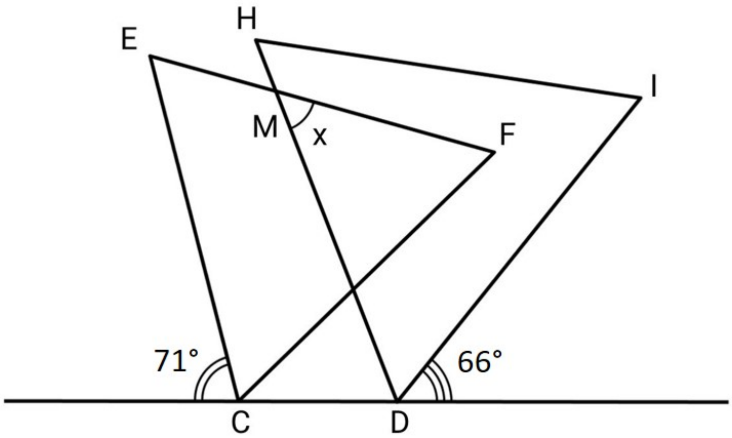
Ответ. 16.

5. Два равносторонних треугольника CEF и DIH расположены так, как показано на чертеже. На чертеже отмечены величины некоторых углов. Найдите величину угла x. Ответ дайте в градусах.



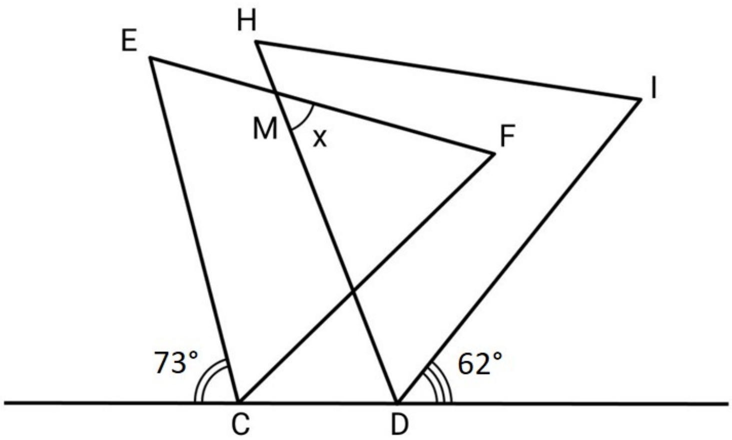
Ответ. 41.

5. Два равносторонних треугольника CEF и DIH расположены так, как показано на чертеже. На чертеже отмечены величины некоторых углов. Найдите величину угла x. Ответ дайте в градусах.



Ответ. 43.

5. Два равносторонних треугольника CEF и DIH расположены так, как показано на чертеже. На чертеже отмечены величины некоторых углов. Найдите величину угла x. Ответ дайте в градусах.



Ответ. 45.

6. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 6$. Точка M — середина отрезка BC, а точка H — основание перпендикуляра, опущенного из B на биссектрису угла A. Найдите длину отрезка HM. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. 0,5.

6. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 4$, $BC = 6$, $CA = 8$. Точка M — середина отрезка BC, а точка H — основание перпендикуляра, опущенного из B на биссектрису угла A. Найдите длину отрезка HM. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. 2.

6. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 6$, $BC = 10$, $CA = 9$. Точка M — середина отрезка BC, а точка H — основание перпендикуляра, опущенного из B на биссектрису угла A. Найдите длину отрезка HM. Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. 1,5.

7. На доске были написаны числа a, b и c . Их стёрли, а взамен записали числа $a - 2$, $b + 2$, c^2. После этого оказалось, что на доске написаны те же числа, что и вначале (возможно, в другом порядке). Какие значения может принимать число a, если известно, что сумма чисел a, b и c равна 2006? Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. 1004 или 1003,5.

7. На доске были написаны числа a, b и c . Их стёрли, а взамен записали числа $a - 1$, $b + 1$, c^2. После этого оказалось, что на доске написаны те же числа, что и вначале (возможно, в другом порядке). Какие значения может принимать число a, если известно, что сумма чисел a, b и c равна 2008? Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. 1004 или 1004,5.

7. На доске были написаны числа a, b и c . Их стёрли, а взамен записали числа $a - 2$, $b + 2$, c^2. После этого оказалось, что на доске написаны те же числа, что и вначале (возможно, в другом порядке). Какие значения может принимать число a, если известно, что сумма чисел a, b и c равна 2005? Если необходимо, ответ округлите до сотых.

Ответ. 1003 или 1003,5.

8. Школьный этап олимпиады по магии и волшебству состоит из 5 заклинаний. Из 100 юных волшебников, принимавших участие в соревновании,

- 96 правильно выполнили 1-е заклинание,
- 93 правильно выполнили 2-е заклинание,
- 77 правильно выполнили 3-е заклинание,
- 98 правильно выполнили 4-е заклинание,
- 95 правильно выполнили 5-е заклинание.

Какое наименьшее количество школьников могло правильно выполнить ровно 4 из 5 заклинаний при описанных условиях?

Ответ. 5.

8. Школьный этап олимпиады по магии и волшебству состоит из 5 заклинаний. Из 100 юных волшебников, принимавших участие в соревновании,

- 96 правильно выполнили 1-е заклинание,
- 97 правильно выполнили 2-е заклинание,
- 93 правильно выполнили 3-е заклинание,
- 77 правильно выполнили 4-е заклинание,
- 98 правильно выполнили 5-е заклинание.

Какое наименьшее количество школьников могло правильно выполнить ровно 4 из 5 заклинаний при описанных условиях?

Ответ. 7.

8. Школьный этап олимпиады по магии и волшебству состоит из 5 заклинаний. Из 100 юных волшебников, принимавших участие в соревновании,

- 94 правильно выполнили 1-е заклинание,
- 77 правильно выполнили 2-е заклинание,
- 97 правильно выполнили 3-е заклинание,
- 95 правильно выполнили 4-е заклинание,
- 97 правильно выполнили 5-е заклинание.

Какое наименьшее количество школьников могло правильно выполнить ровно 4 из 5 заклинаний при описанных условиях?

Ответ. 6.