

## Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 8 класса

2022/23 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

### Задание № 1.1

---

#### Условие:

На экзамене по зельеварению каждому из учеников школы Хогвартс нужно было изготовить по 4 зелья. Гермиона управилась с этим заданием за полчаса, Гарри — за 40 минут, а Рону понадобился 1 час. Сколько зелий изготовили бы Рон, Гермиона и Гарри вместе за 2 часа, если бы продолжили работать с теми же скоростями?

**Ответ:** 36

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

#### *Решение.*

Посчитаем скорость изготовления зелий каждым из трёх учеников, будем считать её в зельях в час. Гермиона изготовила 4 зелья за полчаса, значит, за час бы она изготовила в 2 раза больше зелий, то есть 8. Получается, её скорость — 8 зелий в час. Гарри изготовил 4 зелья за 40 минут, а это 1 зелье за 10 минут, а значит, за 60 минут он изготовил бы 6 зелий, что даёт ему скорость 6 зелий в час. Что касается Рона, то он изготовил за час 4 зелья, а значит, его скорость — 4 зелья в час. Теперь представим, что трое учеников работают вместе в течение одного часа. Гермиона за этот час изготовит 8 зелий, Гарри изготовит 6, а Рон изготовит 4, а значит, вместе они изготовят за этот час  $8 + 6 + 4 = 18$  зелий. Соответственно, если они будут работать вместе 2 часа, то изготовят в 2 раза больше зелий, то есть  $18 \cdot 2 = 36$  зелий — что даёт нам искомый ответ.

## Задание № 1.2

---

**Условие:**

На экзамене по зельеварению каждому из учеников школы Хогвартс нужно было изготовить по 6 зелий. Гермиона управилась с этим заданием за полчаса, Гарри — за 40 минут, а Рону понадобился 1 час. Сколько зелий изготовили бы Рон, Гермиона и Гарри вместе за 2 часа, если бы продолжили работать с теми же скоростями?

**Ответ:** 54

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №1.1.*

### Задание № 1.3

---

**Условие:**

На экзамене по зельеварению каждому из учеников школы Хогвартс нужно было изготовить по 8 зелий. Гермиона управилась с этим заданием за полчаса, Гарри — за 40 минут, а Рону понадобился 1 час. Сколько зелий изготовили бы Рон, Гермиона и Гарри вместе за 2 часа, если бы продолжили работать с теми же скоростями?

**Ответ:** 72

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №1.1*

#### Задание № 1.4

---

**Условие:**

На экзамене по зельеварению каждому из учеников школы Хогвартс нужно было изготовить по 10 зелий. Гермиона управилась с этим заданием за полчаса, Гарри — за 40 минут, а Рону понадобился 1 час. Сколько зелий изготовили бы Рон, Гермиона и Гарри вместе за 2 часа, если бы продолжили работать с теми же скоростями?

**Ответ:** 90

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №1.1*

## Задание № 2.1

---

### Условие:

Маша отдыхала с друзьями на море и нарисовала на песке геометрическую фигуру.

Аня воскликнула: *О, это же треугольник!*

Розалина возразила: *Нет, это четырёхугольник!*

Оля тоже высказалась: *Это квадрат!*

Алёна не осталась в стороне: *Это прямоугольник!*

Только два из четырёх высказываний оказались верными. Какие фигуры из приведённого списка могла нарисовать Маша? Укажите все верные ответы:

### Варианты ответов:

- Ромб с прямым углом
- Параллелограмм с равными сторонами
- Прямоугольник с периметром 166 см
- Четырёхугольник со сторонами длиной 1, 5, 6, 10 см

### Правильный ответ:

- Прямоугольник с периметром 166 см

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

### Решение.

Если бы Оля была права, то Алёна с Розалиной тоже оказались бы правы, но в таком случае верных высказываний уже хотя бы три, что невозможно. Значит, Оля ошиблась. Если бы Аня оказалась права, то и Розалина, и Оля, и Алёна ошиблись бы, но тогда верных утверждений всего одно, что невозможно. Значит, Аня ошиблась. Тогда правы должны оказаться Розалина и Алёна, в таком случае фигура — прямоугольник с неравными сторонами. Вариант 4 не подходит, так как должно быть две пары равных сторон. Параллелограмм с равными сторонами — это ромб, но ромб, являющийся

прямоугольником, является и квадратом, а мы знаем, что наша фигура не квадрат, поэтому вариант 2 тоже не подходит. Вариант 1 не подходит, так как ромб с прямым углом — это квадрат. Значит, остается только вариант 3. Он возможен, пример — прямоугольник со сторонами 1 и 82.

## Задание № 2.2

---

### Условие:

Катя отдыхала с друзьями на море и нарисовала на песке геометрическую фигуру.

Полина воскликнула: *О, это же треугольник!*

Лена возразила: *Нет, это четырёхугольник!*

Настя тоже высказалась: *Это квадрат!*

Рита не осталась в стороне: *Это прямоугольник!*

Только два из четырёх высказываний оказались верными. Какие фигуры из приведённого списка могла нарисовать Катя? Укажите все верные ответы.

### Варианты ответов:

- Ромб с прямым углом
- Параллелограмм с равными сторонами
- Прямоугольник с периметром 208 см
- Четырёхугольник со сторонами длиной 2, 6, 7, 14 см

### Правильный ответ:

- Прямоугольник с периметром 208 см

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №2.1*

### Задание № 2.3

---

**Условие:**

Света отдыхала с друзьями на море и нарисовала на песке геометрическую фигуру.

Наташа воскликнула: *О, это же треугольник!*

Вика возразила: *Нет, это четырёхугольник!*

Лиза тоже высказалась: *Это квадрат!*

Рената не осталась в стороне: *Это прямоугольник!*

Только два из четырёх высказываний оказались верными. Какие фигуры из приведённого списка могла нарисовать Света? Укажите все верные ответы.

**Варианты ответов:**

- Ромб с прямым углом
- Параллелограмм с равными сторонами
- Прямоугольник с периметром 144 см
- Четырёхугольник со сторонами длиной 3, 7, 8, 15 см

**Правильный ответ:**

- Прямоугольник с периметром 144 см

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №2.1*



## Задание № 2.4

---

### Условие:

Кристина отдыхала с друзьями на море и нарисовала на песке геометрическую фигуру.

Даша воскликнула: *О, это же треугольник!*

Алина возразила: *Нет, это четырёхугольник!*

Марина тоже высказалась: *Это квадрат!*

Люда не осталась в стороне: *Это прямоугольник!*

Только два из четырёх высказываний оказались верными. Какие фигуры из приведённого списка могла нарисовать Кристина? Укажите все верные ответы.

### Варианты ответов:

- Ромб с прямым углом
- Параллелограмм с равными сторонами
- Прямоугольник с периметром 200 см
- Четырёхугольник со сторонами длиной 5, 7, 6, 12 см

### Правильный ответ:

- Прямоугольник с периметром 200 см

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №2.1*

### Задание № 3.1

---

**Условие:**

Решите уравнение  $6x^2 + 10x + 25 + 5y^2 + 10xy = 0$ .

**Ответ:**

$x = -5, y = 5$

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение.*

Представим  $6x^2$  как  $5x^2 + x^2$ . Тогда левую часть, если изменить порядок слагаемых, можно представить вот в таком виде:

$$(x^2 + 10x + 25) + (5y^2 + 10xy + 5x^2) = 0.$$

Теперь заметим, что левую часть можно разложить как  $(x+5)^2 + 5(x+y)^2$ .

Поскольку  $(x+5)^2$  — это хотя бы ноль (поскольку квадрат любого вещественного числа неотрицателен), и  $(x+y)^2$  — хотя бы ноль (по той же причине), а потому и  $5(x+y)^2$  — тоже хотя бы ноль, то, раз их сумма равна нулю, такое возможно только когда оба слагаемых — нули. Получаем, что  $(x+5)^2 = 0$ ,  $(x+y)^2 = 0$ . Если квадрат числа равен нулю, то само число тоже равно нулю (потому что у ненулевых чисел квадрат больше нуля), а значит,  $x + 5 = 0$ ,  $x + y = 0$ . Отсюда получаем, что  $x = -5, y = 5$ .

### Задание № 3.2

---

**Условие:**

Решите уравнение  $7x^2 + 12x + 36 + 6y^2 + 12xy = 0$ .

**Ответ:**

$x = -6, y = 6$

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №3.1*

### Задание № 3.3

---

**Условие:**

Решите уравнение  $8x^2 + 14x + 49 + 7y^2 + 14xy = 0$ .

**Ответ:**

$x = -7, y = 7$

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №3.1*

### Задание № 3.4

---

**Условие:**

Решите уравнение  $9x^2 + 16x + 64 + 8y^2 + 16xy = 0$ .

**Ответ:**

$x = -8, y = 8$

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №3.1*

## Задание № 4.1

---

### Условие:

Шестеро друзей живут в небольшом городке на юге Франции. Однажды они решили вместе съездить в Париж на один день и посмотреть там достопримечательности — Эйфелеву башню, Лувр, Собор Парижской Богоматери, Музей Родена, Булонский лес и Елисейские Поля. Ребята договорились разойтись и посмотреть их отдельно друг от друга, а поскольку времени было мало, каждый выбрал по три достопримечательности и посетил только их. Вечером они встретились и начали обсуждать, кто какие места посетил. Каждый назвал свои три достопримечательности, однако двое друзей случайно всё перепутали и вместо тех мест, которые они посетили, назвали, наоборот, три места, которые не посещали. Вот список мест, которые назвал каждый из друзей:

- Друг 1: Эйфелева башня, Лувр, Собор Парижской Богоматери
- Друг 2: Эйфелева башня, Лувр, Музей Родена
- Друг 3: Собор Парижской Богоматери, Музей Родена, Булонский лес
- Друг 4: Собор Парижской Богоматери, Музей Родена, Елисейские поля
- Друг 5: Собор Парижской Богоматери, Лувр, Музей Родена
- Друг 6: Эйфелева башня, Собор Парижской Богоматери, Музей Родена

Когда же потом друзья начали разбираться, сверять сделанные фотографии, билеты в музеи и рассказывать, кому из них что понравилось, то выяснилось, что на самом деле каждое место посетили ровно трое из них. Помогите восстановить, кто из друзей всё перепутал и назвал места, которые на самом деле **НЕ** посещал. В каждое поле запишите **отдельно** номера друзей, отвечающих условию.

### Ответ:

- 5
- 6

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение.*

Пять человек сказали, что посетили Собор Парижской Богоматери, хотя реально его посетили только трое. Значит, хотя бы двое из них ошиблись, а потому тот, кто не назвал Собор (друг 2), точно сказал всё правильно. По аналогии не ошибся и первый друг, поскольку только он не назвал Музей Родена. Теперь заметим, что Булонский лес назвал только друг 3. Значит, среди оставшихся двое ошиблись, поскольку только трое могли не посетить собор, а потому и третий друг сказал всё правильно. И по аналогии не ошибся и друг 4, поскольку лишь он один назвал Елисейские поля. Остаются друзья 5 и 6, которые и ошиблись. Восстановим правильные посещенные места и убедимся, что всё сходится:

Реально посещённые достопримечательности:

Друг 1: Эйфелева башня, Лувр, Собор Парижской Богоматери

Друг 2: Эйфелева башня, Лувр, Музей Родена

Друг 3: Собор Парижской Богоматери, Музей Родена, Булонский лес

Друг 4: Собор Парижской Богоматери, Музей Родена, Елисейские поля

Друг 5: Эйфелева башня, Булонский лес, Елисейские поля

Друг 6: Лувр, Булонский лес, Елисейские поля

Всё сходится: каждую достопримечательность посетили ровно по 3 друга.

Значит, ответ — ошиблись друзья 5 и 6.

## Задание № 4.2

---

### Условие:

Шестеро друзей живут в небольшом городке на юге Франции. Однажды они решили вместе съездить в Париж на один день и посмотреть там достопримечательности — Эйфелеву башню, Лувр, Собор Парижской Богоматери, Музей Родена, Булонский лес и Елисейские Поля. Ребята договорились разойтись и посмотреть их отдельно друг от друга, а поскольку времени было мало, каждый выбрал по три достопримечательности и посетил только их. Вечером они встретились и начали обсуждать, кто какие места посетил. Каждый назвал свои три достопримечательности, однако двое друзей случайно всё перепутали и вместо тех мест, которые они посетили, назвали, наоборот, три места, которые не посещали. Вот список мест, которые назвал каждый из друзей:

- Друг 1: Эйфелева башня, Собор Парижской Богоматери, Музей Родена
- Друг 2: Эйфелева башня, Лувр, Собор Парижской Богоматери
- Друг 3: Эйфелева башня, Лувр, Музей Родена
- Друг 4: Лувр, Собор Парижской Богоматери, Музей Родена
- Друг 5: Эйфелева башня, Музей Родена, Булонский лес
- Друг 6: Эйфелева башня, Музей Родена, Елисейские поля

Когда же потом друзья начали разбираться, сверять сделанные фотографии, билеты в музеи и рассказывать, кому из них что понравилось, то выяснилось, что на самом деле каждое место посетили ровно трое из них. Помогите восстановить, кто из друзей всё перепутал и назвал места, которые на самом деле **НЕ** посещал. В каждое поле запишите **отдельно** номера друзей, отвечающих условию.

### Ответ:

- 1
- 3

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №4.1*



### Задание № 4.3

---

#### Условие:

Шестеро друзей живут в небольшом городке на юге Франции. Однажды они решили вместе съездить в Париж на один день и посмотреть там достопримечательности — Эйфелеву башню, Лувр, Собор Парижской Богоматери, Музей Родена, Булонский лес и Елисейские Поля. Ребята договорились разойтись и посмотреть их отдельно друг от друга, а поскольку времени было мало, каждый выбрал по три достопримечательности и посетил только их. Вечером они встретились и начали обсуждать, кто какие места посетил. Каждый назвал свои три достопримечательности, однако двое друзей случайно всё перепутали и вместо тех мест, которые они посетили, назвали, наоборот, три места, которые не посещали. Вот список мест, которые назвал каждый из друзей:

- Друг 1: Эйфелева башня, Лувр, Музей Родена
- Друг 2: Лувр, Музей Родена, Елисейские Поля
- Друг 3: Эйфелева башня, Булонский лес, Елисейские поля
- Друг 4: Эйфелева башня, Музей Родена, Елисейские поля
- Друг 5: Эйфелева башня, Собор Парижской Богоматери, Елисейские поля
- Друг 6: Эйфелева башня, Лувр, Елисейские поля

Когда же потом друзья начали разбираться, сверять сделанные фотографии, билеты в музеи и рассказывать, кому из них что понравилось, то выяснилось, что на самом деле каждое место посетили ровно трое из них. Помогите восстановить, кто из друзей всё перепутал и назвал места, которые на самом деле **НЕ** посещал. В каждое поле запишите **отдельно** номера друзей, отвечающих условию.

#### Ответ:

- 4
- 6

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №4.1*

#### Задание № 4.4

---

**Условие:**

Шестеро друзей живут в небольшом городке на юге Франции. Однажды они решили вместе съездить в Париж на один день и посмотреть там достопримечательности — Эйфелеву башню, Лувр, Собор Парижской Богоматери, Музей Родена, Булонский лес и Елисейские Поля. Ребята договорились разойтись и посмотреть их отдельно друг от друга, а поскольку времени было мало, каждый выбрал по три достопримечательности и посетил только их. Вечером они встретились и начали обсуждать, кто какие места посетил. Каждый назвал свои три достопримечательности, однако двое друзей случайно всё перепутали и вместо тех мест, которые они посетили, назвали, наоборот, три места, которые не посещали. Вот список мест, которые назвал каждый из друзей:

- Друг 1: Эйфелева башня, Лувр, Собор Парижской Богоматери
- Друг 2: Эйфелева башня, Собор Парижской Богоматери, Булонский лес
- Друг 3: Эйфелева башня, Лувр, Булонский лес
- Друг 4: Собор Парижской Богоматери, Булонский лес, Елисейские Поля
- Друг 5: Собор Парижской Богоматери, Лувр, Булонский лес
- Друг 6: Собор Парижской Богоматери, Булонский лес, Музей Родена

Когда же потом друзья начали разбираться, сверять сделанные фотографии, билеты в музеи и рассказывать, кому из них что понравилось, то выяснилось, что на самом деле каждое место посетили ровно трое из них. Помогите восстановить, кто из друзей всё перепутал и назвал места, которые на самом деле **НЕ** посещал. В каждое поле запишите **отдельно** номера друзей, отвечающих условию.

**Ответ:**

- 2
- 5

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №4.1*

### Задание № 5.1

---

**Условие:**

В некотором языке  $N$  буквы обозначают всего 10 согласных и 5 гласных звуков. Слоги в этом языке допустимы двух видов: либо «согласный + гласный», либо «согласный + гласный + согласный». Словом в языке  $N$  является любая последовательность букв, которую можно допустимым образом разбить на слоги. Например, русское слово «кошка» могло бы быть словом языка  $N$ , поскольку оно может быть разбито на слоги как «кош-ка», а вот слова «гроза» в языке  $N$  существовать не могло бы, поскольку оно начинается с двух согласных, которые на слоги не разделяются. Сколько всего в языке  $N$  восьмибуквенных слов?

**Ответ:** 43750000

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение.*

Заметим, что количество гласных не должно быть больше половины от общего количества букв в слове, то есть больше 4, поскольку в каждом слоге с гласным есть хотя бы один согласный. Также количество гласных не может быть меньше  $\frac{1}{3}$  от количества букв в слове, поскольку согласных максимум в два раза больше, чем гласных. Таким образом, 2 или меньше гласных в восьмибуквенном слове быть не может. Это означает, что возможные количества гласных — 4 или 3. В первом случае возможно только одно разбиение на слоги: сг-сг-сг-сг, а во втором случае возможны три разбиения: сгс-сгс-сг, сгс-сг-сгс, сг-сгс-сгс (с — согласный, г — гласный).

Посчитаем количества слов при каждом из четырех разбиений на слоги:

$$\text{сг-сг-сг-сг: } 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 = 10^4 \cdot 5^4$$

$$\text{сгс-сгс-сг: } 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 10^5 \cdot 5^3$$

$$\text{сгс-сг-сгс: } 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 = 10^5 \cdot 5^3$$

$$\text{сг-сгс-сгс: } 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 = 10^5 \cdot 5^3$$

Общее количество восьмибуквенных слов в языке  $N$  равно сумме этих четырёх чисел, то есть  $10^4 \cdot 5^4 + 3 \cdot 10^5 \cdot 5^3 = 43\,750\,000$ .

## Задание № 5.2

---

**Условие:**

В некотором языке N буквы обозначают всего 10 согласных и 8 гласных звука. *Слоги* в этом языке допустимы двух видов: либо «согласный + гласный», либо «согласный + гласный + согласный». *Словом* в языке N является любая последовательность букв, которую можно допустимым образом разбить на слоги. Например, русское слово «кошка» могло бы быть словом языка N, поскольку оно может быть разбито на слоги как «кош-ка», а вот слова «гроза» в языке N существовать не могло бы, поскольку оно начинается с двух согласных, которые на слоги не разделяются. Сколько всего в языке N восьмибуквенных слов?

**Ответ:** 194560000

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №5.1*

### Задание № 5.3

---

**Условие:**

В некотором языке  $N$  буквы обозначают всего 20 согласных и 5 гласных звуков. *Слоги* в этом языке допустимы двух видов: либо «согласный + гласный», либо «согласный + гласный + согласный». *Словом* в языке  $N$  является любая последовательность букв, которую можно допустимым образом разбить на слоги. Например, русское слово «кошка» могло бы быть словом языка  $N$ , поскольку оно может быть разбито на слоги как «кош-ка», а вот слова «гроза» в языке  $N$  существовать не могло бы, поскольку оно начинается с двух согласных, которые на слоги не разделяются. Сколько всего в языке  $N$  восьмибуквенных слов?

**Ответ:** 1300000000

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №5.1*

#### Задание № 5.4

---

**Условие:**

В некотором языке N буквы обозначают всего 20 согласных и 3 гласных звука. *Слоги* в этом языке допустимы двух видов: либо «согласный + гласный», либо «согласный + гласный + согласный». *Словом* в языке N является любая последовательность букв, которую можно допустимым образом разбить на слоги. Например, русское слово «кошка» могло бы быть словом языка N, поскольку оно может быть разбито на слоги как «кош-ка», а вот слова «гроза» в языке N существовать не могло бы, поскольку оно начинается с двух согласных, которые на слоги не разделяются. Сколько всего в языке N восьмибуквенных слов?

**Ответ:** 272160000

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №5.1*

### Задание № 6.1

---

**Условие:**

Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = 5$ . Медиана  $BM$  перпендикулярна биссектрисе  $AL$ .  
Найдите  $AC$ .

**Ответ:** 10

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение.*

Рассмотрим треугольник  $ABM$ : так как в нём биссектриса, проведённая из вершины  $A$ , перпендикулярна стороне  $BM$ , то треугольник  $ABM$  равнобедренный.

Значит,  $AB = AM = MC$ . Поэтому  $AC = 10$ .

### Задание № 6.2

---

**Условие:**

Дан треугольник  $ABC$ . Медиана  $BM$  перпендикулярна биссектрисе  $AL$ , причём  $BL = 5$ .  
Найдите  $LM$ .

**Ответ:** 5

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №6.1*



### Задание № 6.3

---

**Условие:**

Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AC = 6$ . Медиана  $BM$  перпендикулярна биссектрисе  $AL$ .  
Найдите  $AB$ .

**Ответ:** 3

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №6.1*

### Задание № 6.4

---

**Условие:**

Дан треугольник  $ABC$ . Медиана  $BM$  перпендикулярна биссектрисе  $AL$ , причём  $LM = 4$ .  
Найдите  $BL$ .

**Ответ:** 4

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №6.1*

## Задание № 7.1

---

### Условие:

Художник Иван Константинович решил продать несколько своих картин на Сломанном Аукционе. Правила Сломанного Аукциона следующие: сначала Иван Константинович называет некоторую стартовую цену для своей картины, после чего те участники, которые хотят приобрести эту картину, начинают торговаться за неё — повышать цену, но только **в два раза**, — то есть новая цена может быть только в два раза больше последней из предложенных; тот участник, после которого никто не осмелится повысить цену ещё в два раза, получает картину; если же никто не торгуется за картину, то есть не предлагает цену выше начальной, то картина остается непроданной. Для каждой своей картины Иван Константинович решил установить начальную цену в 1000 рублей. Сколько всего картин он продал на Сломанном Аукционе, если все его картины купили за разные цены, а его общая выручка за все проданные картины составила 250 000 рублей?

**Ответ:** 6

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

### Решение.

Утверждается, что каждая картина Ивана Константиновича была продана за  $1000 \times 2^x$  рублей, где  $x$  — какое-то натуральное число. Действительно, изначально у картины цена 1000 рублей, и каждый участник удваивает её цену, то есть цена умножается на 2, — а значит, когда картина доходит до последнего участника и продается, её цена несколько (возможно, 1) раз умножается на 2 и становится  $1000 \times 2 \times \dots \times 2$ , то есть  $1000 \times 2^x$  рублей.

При этом  $x$  не может быть равно 0, потому что продать картину за 1000 рублей нельзя — если никто не удваивает цену, то картина остается непроданной, а речь идет только о проданных картинах.

Итак, итоговая выручка Ивана Константиновича — это сумма нескольких таких чисел вида  $1000 \times 2^a$ , где показатель степени двойки — это некоторое натуральное число. То есть это 1000 умноженная на некоторую сумму степеней двойки. Поскольку все цены, по условию

задачи, были разные, то никакая степень двойки в этой сумме не повторяется. Нам осталось только представить число  $250\ 000 / 1000 = 250$  в виде суммы разных степеней двойки, и количество слагаемых в таком разложении покажет нам количество проданных картин. Сделаем это:  $250 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 2 \Rightarrow 6$  слагаемых  $\Rightarrow$  было продано 6 картин.

Единственность такого разложения можно объяснить с помощью простых рассуждений о том, что может и чего не может быть в разложении: степеней двойки больше 128 в сумме нет, так как тогда сумма хотя бы 256, а должна быть 250. При этом 128 должно быть обязательно, а иначе максимальная сумма была бы  $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 126$ , так как все числа в сумме разные (так как цены по условию разные). Остается набрать еще  $250 - 128 = 122$ . Аналогично доказывается, что в сумме должны быть 64, 32, 16 и 8. После этого остается набрать 2, которое набирается собственно самим числом 2.

## Задание № 7.2

---

### **Условие:**

Художник Иван Константинович решил продать несколько своих картин на Сломанном Аукционе. Правила Сломанного Аукциона следующие: сначала Иван Константинович называет некоторую стартовую цену для своей картины, после чего те участники, которые хотят приобрести эту картину, начинают торговаться за неё — повышать цену, но только **в два раза**, — то есть новая цена может быть только в два раза больше последней из предложенных; тот участник, после которого никто не осмелится повысить цену ещё в два раза, получает картину; если же никто не торгуется за картину, то есть не предлагает цену выше начальной, то картина остается непроданной. Для каждой своей картины Иван Константинович решил установить начальную цену в 1000 рублей. Сколько всего картин он продал на Сломанном Аукционе, если все его картины купили за разные цены, а его общая выручка за все проданные картины составила 300 000 рублей?

**Ответ:** 4

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №7.1*

### Задание № 7.3

---

**Условие:**

Художник Иван Константинович решил продать несколько своих картин на Сломанном Аукционе. Правила Сломанного Аукциона следующие: сначала Иван Константинович называет некоторую стартовую цену для своей картины, после чего те участники, которые хотят приобрести эту картину, начинают торговаться за неё — повышать цену, но только **в два раза**, — то есть новая цена может быть только в два раза больше последней из предложенных; тот участник, после которого никто не осмелится повысить цену ещё в два раза, получает картину; если же никто не торгуется за картину, то есть не предлагает цену выше начальной, то картина остается непроданной. Для каждой своей картины Иван Константинович решил установить начальную цену в 1000 рублей. Сколько всего картин он продал на Сломанном Аукционе, если все его картины купили за разные цены, а его общая выручка за все проданные картины составила 350 000 рублей?

**Ответ:** 6

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №7.1*

#### Задание № 7.4

---

**Условие:**

Художник Иван Константинович решил продать несколько своих картин на Сломанном Аукционе. Правила Сломанного Аукциона следующие: сначала Иван Константинович называет некоторую стартовую цену для своей картины, после чего те участники, которые хотят приобрести эту картину, начинают торговаться за неё — повышать цену, но только в два раза, — то есть новая цена может быть только в два раза больше последней из предложенных; тот участник, после которого никто не осмелится повысить цену ещё в два раза, получает картину; если же никто не торгуется за картину, то есть не предлагает цену выше начальной, то картина остается непроданной. Для каждой своей картины Иван Константинович решил установить начальную цену в 1000 рублей. Сколько всего картин он продал на Сломанном Аукционе, если все его картины купили за разные цены, а его общая выручка за все проданные картины составила 400 000 рублей?

**Ответ:** 3

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №7.1*

### Задание № 8.1

---

**Условие:**

Дан треугольник  $ABC$ , где  $2BC = AC$  и угол  $C = 74^\circ$ . На луче  $BC$  отложили отрезок  $CD = CB$ . После чего из точки  $D$  провели перпендикуляр к прямой, содержащей медиану треугольника  $ABC$ , проведённую из вершины  $B$ , и на пересечении получили точку  $F$ . Чему равен угол  $CDF$ ? Ответ выразите в градусах.

**Ответ:** 37

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение.*

Отметим  $F'$  — середину отрезка  $AC$ . Тогда  $F'C = 0.5AC = BC = CD = 0.5BD$ . Отсюда следует, что треугольник  $BDF'$  прямоугольный, т.к. его медиана равна половине стороны, к которой проведена. Следовательно, угол  $DF'B = 90^\circ$ , а  $DF'$  — перпендикуляр к медиане угла  $B$ . Это означает, что точка  $F'$  совпадает с  $F$ . Заметим, что треугольник  $FCD$  — равнобедренный, т.к. отрезки  $FC$  и  $CD$  равны, а значит и углы  $CFD$  и  $CDF$ , как углы при основании, равны. Угол  $C$  — внешний для треугольника  $FCD$ , следовательно  $\angle C = \angle CFD + \angle CDF = 2\angle CDF$ . Отсюда  $\angle CDF = 0.5\angle C = 37^\circ$ .



### Задание № 8.2

---

**Условие:**

Дан треугольник  $ABC$ , где  $2BC = AC$  и угол  $C = 106^\circ$ . На луче  $BC$  отложили отрезок  $CX = CB$ . После чего из точки  $X$  провели перпендикуляр к прямой, содержащей медиану треугольника  $ABC$ , проведённую из вершины  $B$ , и на пересечении получили точку  $Y$ . Чему равен угол  $CXY$ ? Ответ выразите в градусах.

**Ответ:** 53

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №8.1*

### Задание № 8.3

---

**Условие:**

Дан треугольник  $ABC$ , где  $2BC = AC$  и угол  $C = 46^\circ$ . На луче  $BC$  отложили отрезок  $CM = CB$ . После чего из точки  $M$  провели перпендикуляр к прямой, содержащей медиану треугольника  $ABC$ , проведённую из вершины  $B$ , и на пересечении получили точку  $N$ . Чему равен угол  $CMN$ ? Ответ выразите в градусах.

**Ответ:** 23

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №8.1*

#### Задание № 8.4

---

**Условие:**

Дан треугольник  $ABC$ , где  $2BC=AC$  и угол  $C = 78^\circ$ . На луче  $BC$  отложили отрезок  $CK=CB$ . После чего из точки  $K$  провели перпендикуляр к прямой, содержащей медиану треугольника  $ABC$ , проведённую из вершины  $B$ , и на пересечении получили точку  $L$ . Чему равен угол  $CKL$ ? Ответ выразите в градусах.

**Ответ:** 39

**Точное совпадение ответа — 1 балл**

*Решение по аналогии с заданием №8.1*