Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 7 класса

2022/23 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Задание № 1.1

Условие:

Пять подруг — Маша, Настя, Ирина, Оля и Аня — каждый день собираются в парке после покупки мороженого в магазинчике за углом. Однажды между девочками состоялся разговор.

Ирина: *Я была самой первой в очереди!*
Оля: *После меня никого не было*.
Аня: *После меня был только один человек*.
Маша: *Передо мной было пять человек*.
Настя: *Я стояла рядом с Ириной*.

Девочки дружат, поэтому друг другу не врут. Сколько человек было между Машей и Настей?

Ответ: 3

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Из утверждений Ирины и Оли ясно, что они были первой и последней соответственно. Так как после Ани был только один человек, это была Оля. Настя стояла рядом с Ириной, но перед ней она стоять не могла, значит, Настя была второй. Получается, что Маша стояла где-то между Настей и Аней, причём перед ней стояло пять человек, двое из которых — Ирина и Настя. Значит, между Машей и Настей ровно трое людей.

Задание № 1.2

Условие:

Пять подруг — Катя, Полина, Алёна, Лена и Света — каждый день собираются в парке после покупки мороженого в магазинчике за углом. Однажды между девочками состоялся разговор.

Полина: *Я стояла рядом с Алёной.*
Алёна: *Я была самой первой в очереди!*
Лена: *После меня никого не было.*
Катя: *Передо мной было пять человек.*
Света: *После меня был только один человек.*

Девочки дружат, поэтому друг другу не врут. Сколько человек было между Катей и Полиной?

Ответ: 3
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №1.1

Задание № 1.3

Условие:

Пять подруг — Саша, Юля, Рита, Алина и Наташа — каждый день собираются в парке после покупки мороженого в магазинчике за углом. Однажды между девочками состоялся разговор.

Саша: *Передо мной было пять человек.*
Алина: *После меня никого не было.*
Рита: *Я была самой первой в очереди!*
Наташа: *После меня был только один человек.*
Юля: *Я стояла рядом с Ритой.*

Девочки дружат, поэтому друг другу не врут. Сколько человек было между Сашей и Юлей?

Ответ: 3
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №1.1

Задание № 1.4

Условие:

Пять подруг — Кристина, Надя, Марина, Лиза и Галя — каждый день собираются в парке после покупки мороженого в магазинчике за углом. Однажды между девочками состоялся разговор.

Кристина: *Передо мной было пять человек.*
Марина: *Я была самой первой в очереди!*
Лиза: *После меня никого не было.*
Надя: *Я стояла рядом с Мариной.*
Галя: *После меня был только один человек.*

Девочки дружат, поэтому друг другу не врут. Сколько человек было между Кристиной и Надей?

Ответ: 3
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №1.1

Задание № 2.1

Условие:

Карлсон и Малыш вместе весят на 10 кг больше, чем Фрекен Бок, а Малыш и Фрекен Бок — на 30 кг больше Карлсона. Сколько весит Малыш? Ответ дайте в килограммах.

Ответ: 20

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Обозначим массу Карлсона буквой К, массу Фрекен Бок — Ф, массу Малыша — М. Тогда из условия следует, что К+М=Ф+10 и М+Ф=К+30. Сложим почленно эти строчки, получим К+2М+Ф=Ф+К+40. Откуда М=20.

Задание № 2.2

Условие:

Карлсон и Фрекен Бок вместе весят на 75 кг больше Малыша, а Фрекен Бок и Малыш — на 45 кг больше Карлсона. Сколько весит Фрекен Бок? Ответ дайте в килограммах.

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №2.1

Задание № 2.3

Условие:

Фрекен Бок и Карлсон вместе весят на 120 кг больше Малыша, а Карлсон и Малыш — на 60 кг больше Фрекен Бок. Сколько весит Карлсон? Ответ дайте в килограммах.

Ответ: 90

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №2.1

Задание № 2.4

Условие:

Пилюлькин и Незнайка вместе весят на 35 кг больше, чем Знайка, а Незнайка и Знайка — на 25 кг больше Пилюлькина. Сколько весит Незнайка? Ответ дайте в килограммах.

Ответ: 30

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №2.1

Задание № 3.1

Условие:

Полина делает на заказ украшения для ювелирного магазина. Каждое украшение состоит из цепочки, камня и кулона. Цепочка бывает серебряная, золотая и железная. У Полины есть камни — фианит, изумруд, кварц — и кулоны в форме звезды, солнца и луны. Полина довольна только тогда, когда на витрине выкладывают в ряд слева направо три украшения по следующим правилам:

- Обязательно должно присутствовать украшение с солнцем на железной цепочке;
- Рядом с украшением с солнцем должны располагаться золотое и серебряное украшения;
- У трёх украшений в ряду должны быть разные камни, кулоны и цепочки.

Сколько существует вариантов сделать Полину довольной?

Ответ: 24

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Заметим, что железное украшение с солнцем точно лежит по середине, потому что должно находиться между золотым и серебряным украшением. На первое место можно выбрать серебряную или золотую цепочку. После выбора цепочки для первого места цепочка на третье место определяется однозначно. На первое место можно выбрать луну или звезду. После выбора кулон для первого места кулон для третьего места определяется однозначно. Три камня на три места можно расположить шестью способами (один из трех камней на первое место, один из двух оставшихся — на второе место, оставшийся камень — на третье место). Вариантов правильно расположить цепочки и кулоны четыре и для каждого их четырёх вариантов есть шесть вариантов для расположения камней. Всего 2*2*6=24.

Задание № 3.2

Условие:

Артём делает на заказ часы для ювелирного магазина. Каждые часы состоят из браслета и циферблата. Браслет бывает кожаный, металлический и нейлоновый. У Артёма есть круглый, квадратный и овальный циферблаты. Часы бывают механические, кварцевые и электронные.

Артем доволен только тогда, когда на витрине выкладывают в ряд слева направо трое часов по следующим правилам:

- Обязательно должны присутствовать механические часы с круглым циферблатом;
- Рядом с часами с круглым циферблатом должны располагаться справа должны располагаться электронные, а слева кварцевые часы;
- У трёх часов в ряду должны быть разные механизмы, браслеты и циферблаты.

Сколько существует вариантов сделать Артёма довольным?

Ответ: 12

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №3.1

Задание № 3.3

Условие:

Алина делает на заказ чехлы для телефонов для магазина техники. Каждый чехол имеет рисунок и брелок.

Чехол бывает силиконовый, кожаный и пластиковый. У Алины есть брелоки: мишка, динозавр, енот и фея — и она умеет рисовать на чехле луну, солнце и облака.

Алина довольна только тогда, когда на витрине выкладывают в ряд слева направо три чехла по следующим правилам:

- Обязательно должен присутствовать силиконовый чехол с брелоком в форме мишки;
- Рядом с чехлом с брелоком в форме мишки слева должен располагаться кожаный, а справа пластиковый чехол;
- У трех чехлов в ряду должны быть разные материалы, брелоки и рисунки.

Сколько существует вариантов сделать Алину довольной?

Ответ: 36

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №3.1

Задание № 3.4

Условие:

Антон делает на заказ часы для ювелирного магазина. Каждые часы состоят из браслета, драгоценного камня и застежки.

Браслет бывает серебряный, золотой и стальной. У Антона есть драгоценные камни: фианит, изумруд, кварц, бриллиант, агат — и застежки: классическая, бабочка, пряжка.

Антон доволен только тогда, когда на витрине выкладывают в ряд слева направо трое часов по следующим правилам:

- Обязательно должны присутствовать стальные часы с классической застежкой и камнем фианита;
- Рядом с часами с классической застежкой должны располагаться золотые и серебряные часы;
- У трёх часов в ряду должны быть разные браслеты, драгоценные камни и застёжки.

Сколько существует вариантов сделать Антона довольным?

Ответ: 48

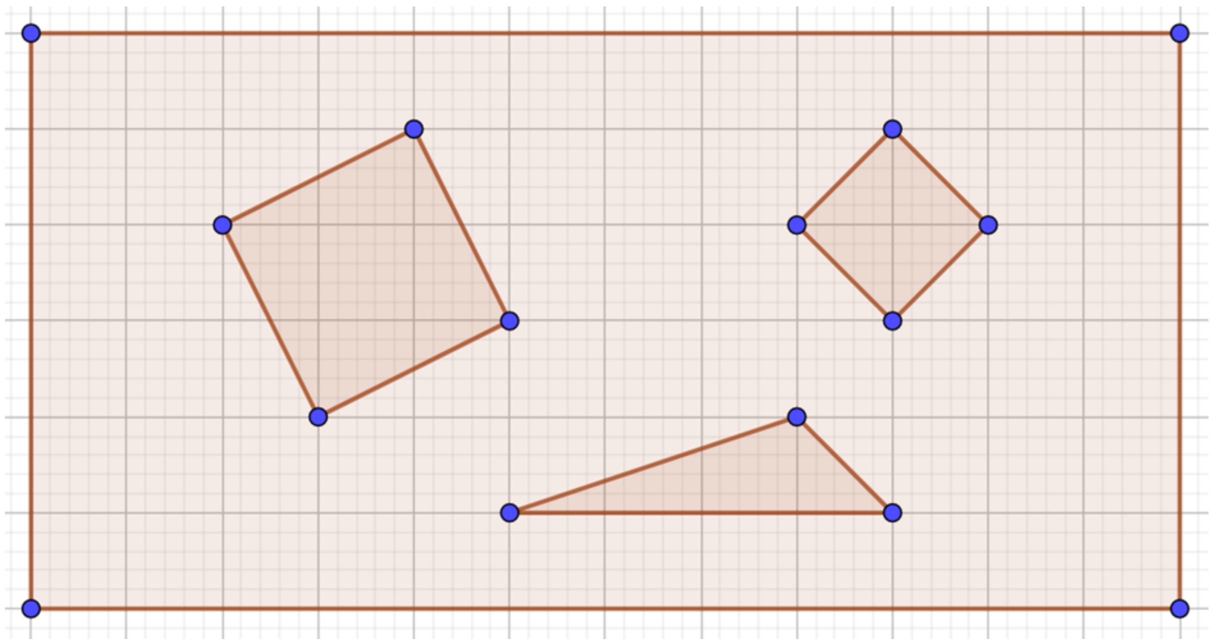
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №3.1

Задание № 4.1

Условие:

Федора Егоровна решила навести чистоту в своём доме и принялась очищать прямоугольную стенку печки от копоти и сажи. Спустя 23 минуты Федора увидела, что уже начисто оттёрла три участка, как показано на рисунке:



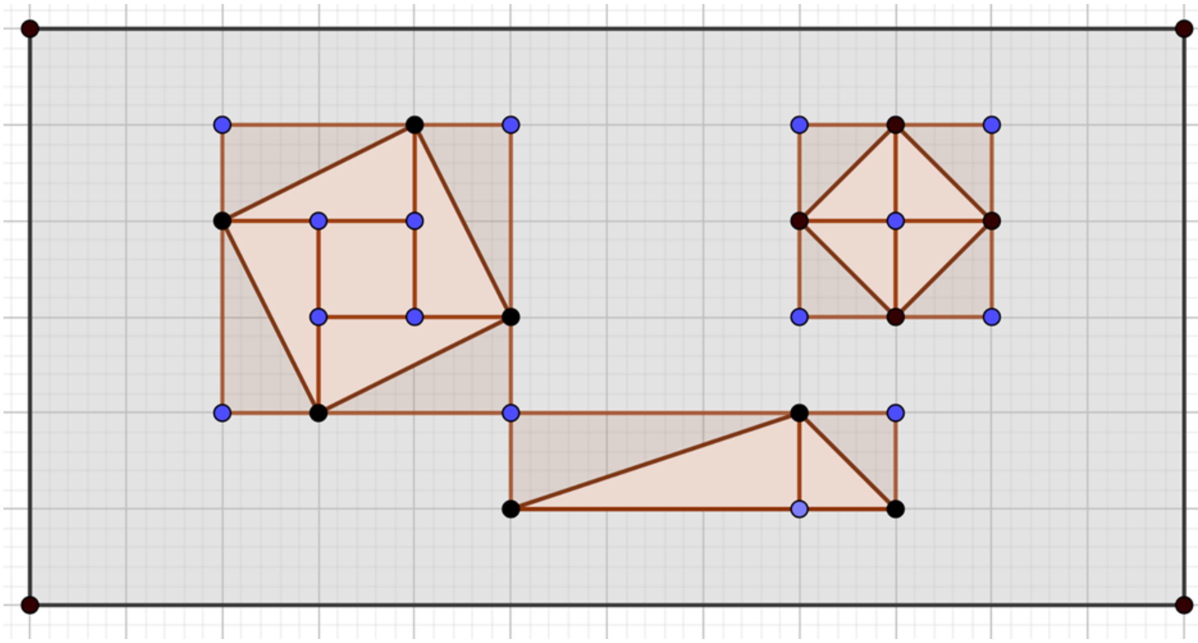
Сколько ещё времени Федоре придётся оттирать стенку до полной белизны, если хозяюшка продолжит убираться с той же скоростью? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 161

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Будем считать все площади в больших квадратиках (у которых сторона состоит из 5 самых крошечных квадратиков). Так, высота стенки печки в этих квадратиках равна 6, а длина равна 12. Её площадь, соответственно, равна 6 * 12 = 72. Теперь в тех же единицах найдём площади белых (оттертых) фигур. Для этого нам понадобится сделать некоторые дополнительные построения:



Самая левая фигура состоит из одного квадратика в серединке площадью 1 * 1 = 1 и из четырёх треугольников, каждый из которых, как видно из дополнительных построений, является половинкой прямоугольника 2 * 1. Итого площадь этой фигуры равна 1 + ((2*1):2)*4 = 5.

Фигура справа состоит из четырех треугольников, каждый из которых — это половинка квадрата 1 * 1. Значит, его площадь равна ((1*1):2)*4 = 2.

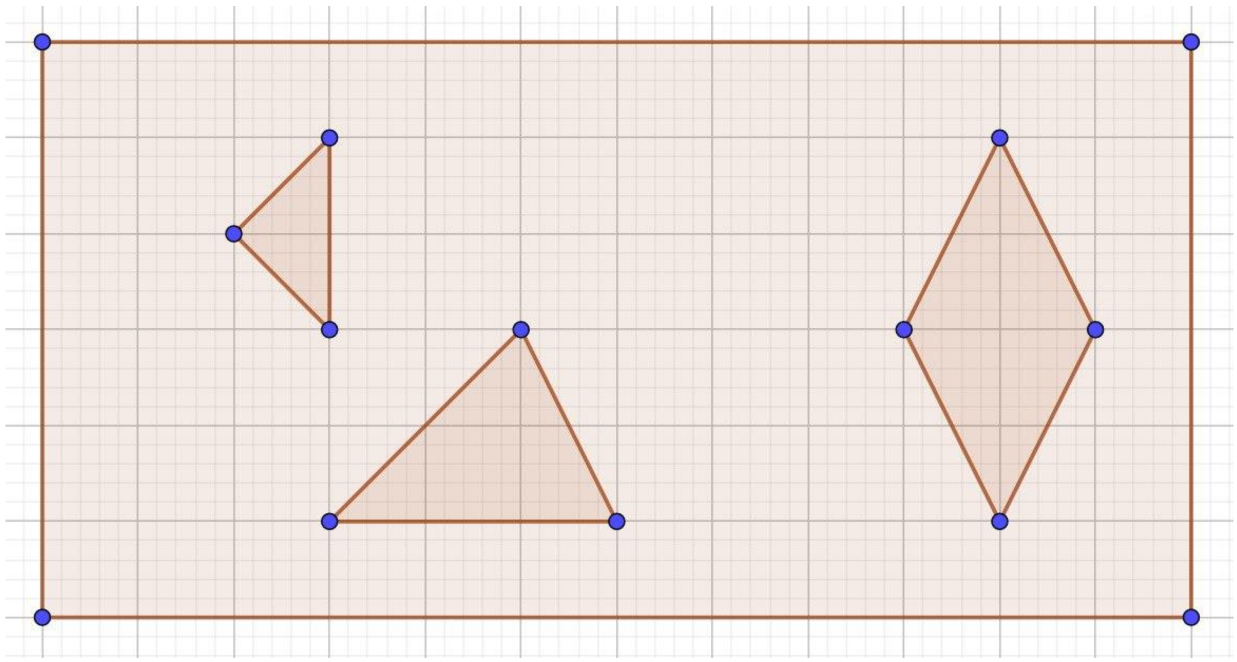
Наконец, треугольник внизу состоит из двух треугольников поменьше, из которых левый — это половинка прямоугольника 1 * 3, а правый — половина квадрата 1 * 1. Значит, площадь треугольника равна (1*3):2 + (1*1):2 = 2.

Общая площадь трёх белых фигурок равна 5 + 2 + 2 = 9. Как мы помним, площадь всей стенки равна 72. Значит, Федоре осталось оттереть площадь, равную 72 - 9 = 63. А если на площадь 9 у нее ушло 23 минуты, то на оставшуюся площадь уйдет в 63:9=7 раз больше минут, 7 * 23 = 161 минута.

Задание № 4.2

Условие:

Федора Егоровна решила навести чистоту в своём доме и принялась очищать прямоугольную стенку печки от копоти и сажи. Спустя 24 минуты Федора увидела, что уже начисто оттёрла три участка, как показано на рисунке:



Сколько ещё времени Федоре придётся оттирать стенку до полной белизны, если хозяюшка продолжит убираться с той же скоростью? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 192

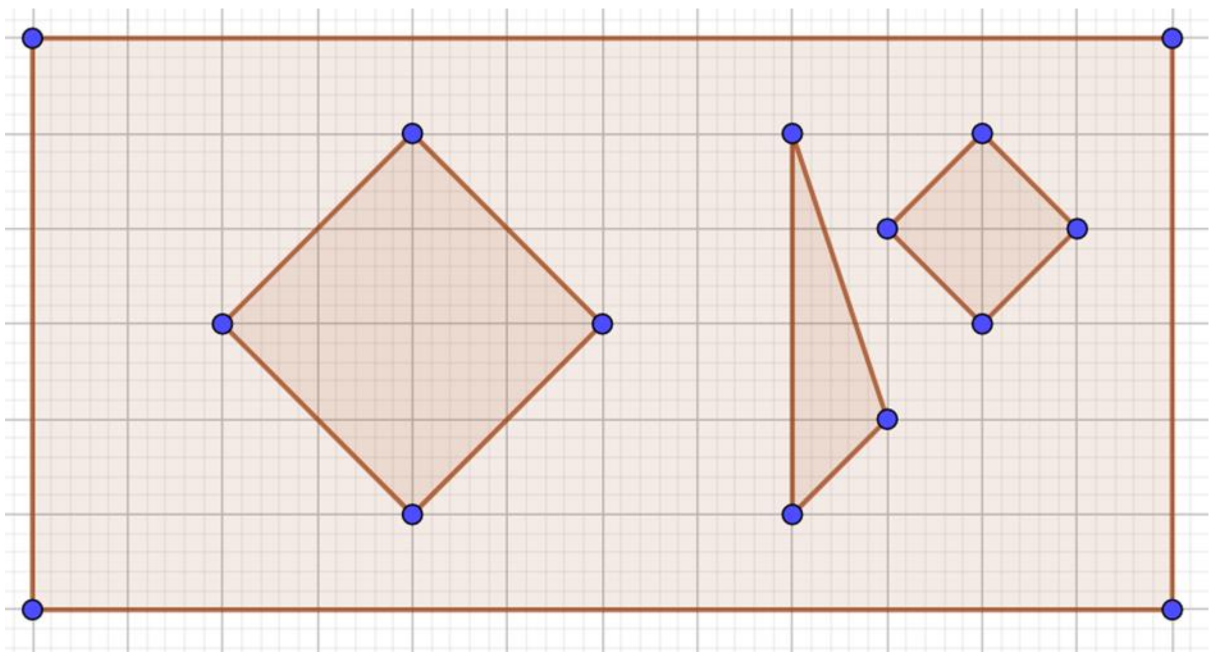
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №4.1

Задание № 4.3

Условие:

Федора Егоровна решила навести чистоту в своем доме и принялась очищать прямоугольную стенку печки от копоти и сажи. Спустя 33 минуты Федора увидела, что уже начисто оттерла три участка, как показано на рисунке:



Сколько ещё времени Федоре придется оттирать стенку до полной белизны, если хозяюшка продолжит убираться с той же скоростью? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 165

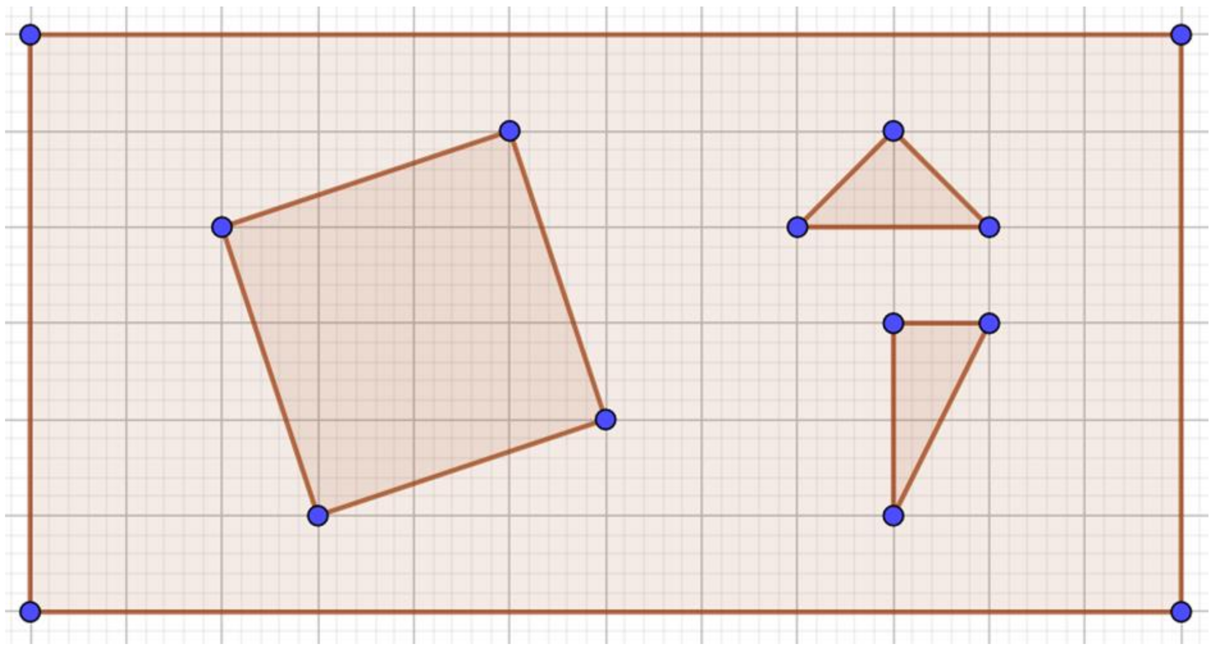
Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №4.1

Задание № 4.4

Условие:

Федора Егоровна решила навести чистоту в своём доме и принялась очищать прямоугольную стенку печки от копоти и сажи. Спустя 34 минуты Федора увидела, что уже начисто оттёрла три участка, как показано на рисунке:



Сколько ещё времени Федоре придётся оттирать стенку до полной белизны, если хозяюшка продолжит убираться с той же скоростью? Ответ выразите в минутах.

Ответ: 170

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №4.1

Задание № 5.1

Условие:

Полина загадала натуральное число. Её подруги задали по одному вопросу:

Маша: Оно делится на 11?

Ирина: Оно делится на 13?

Аня: Оно меньше 15?

Оля: Оно делится на 143?

Полина ответила утвердительно только на два вопроса из четырёх. Какие числа могла загадать Полина? В ответе укажите все возможные варианты.

Ответы:

- 11
- 13

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Если бы Оля оказалась права, число делилось бы на 143, но в таком случае оно делилось бы и на 11, и на 13, тогда утвердительных ответов было бы хотя бы три. Значит, число не делится на 143. Если бы и Маша, и Ирина оказались правы, число делилось бы и на 11, и на 13, но в таком случае оно делилось бы и на 143, а мы уже поняли, что это не так. Значит, из двух ответов Маши и Ирины максимум один был утвердительным. В таком случае, чтобы утвердительных ответов было два, Аня обязана оказаться права, а из Маши и Ирины ровно один человек должен ошибиться. Значит, вариантов два: либо правы Маша и Аня, либо правы Ирина и Аня. В первом случае ответ 11, во втором — 13.

Задание № 5.2

Условие:

Катя загадала натуральное число. Её подруги задали по одному вопросу:

Алёна: Оно делится на 7?

Лена: Оно делится на 5?

Рита: Оно меньше 9?

Света: Оно делится на 35?

Катя ответила утвердительно только на два вопроса из четырёх. Какие числа могла загадать Катя? В ответе укажите все возможные варианты.

Ответы:

- 7
- 5

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №5.1

Задание № 5.3

Условие:

Кристина загадала натуральное число. Её подруги задали по одному вопросу:

Юля: Оно делится на 17?

Настя: Оно делится на 19?

Вика: Оно меньше 20?

Даша: Оно делится на 323?

Кристина ответила утвердительно только на два вопроса из четырёх. Какие числа могла загадать Кристина? В ответе укажите все возможные варианты.

Ответы:

- 17
- 19

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №5.1

Задание № 5.4

Условие:

Галя загадала натуральное число. Её подруги задали по одному вопросу:

Люда: оно делится на 7?

Наташа: оно делится на 11?

Марина: оно меньше 13?

Ирина: оно делится на 77?

Галя ответила утвердительно только на два вопроса из четырёх. Какие числа могла загадать Галя? В ответе укажите все возможные варианты.

Ответы:

- 7
- 11

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №5.1

Задание № 6.1

Условие:

Яша и Гриша играют в игру: сначала по очереди называют число от 1 до 105 (первым называет Гриша, числа должны быть разными). Затем каждый считает количество различных прямоугольников с целыми сторонами, периметр которых равен названному числу. Побеждает тот, у кого число прямоугольников окажется больше. Какое число должен назвать Гриша, чтобы победить? Прямоугольники, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми. Например, прямоугольники 2×3 и 3×2 одинаковые.

Ответ: 104

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Покажем, что, назвав число 104, Гриша победит. Рассмотрим прямоугольник a*b. Его периметр P = 2(a+b) => (a+b) = P/2, тогда длина меньшей из сторон может принимать целые значения от 1 до целой части числа P/4, то есть для выбранного числа P количество различных прямоугольников с таким периметром и целыми сторонами равно целой части числа P/4. Отметим также, что P чётно, так как равно 2(a+b), где a и b целые. Для P = 104 число прямоугольников равно 26. Число больше 104 Яша назвать не может, а для P <= 102 число прямоугольников не больше 25. Значит, Гриша точно выиграет.

Задание № 6.2

Условие:

Саша и Миша играют в игру: сначала по очереди называют число от 1 до 213 (первым называет Миша, числа должны быть разными). Затем каждый считает количество различных прямоугольников с целыми сторонами, периметр которых равен названному числу. Побеждает тот, у кого число прямоугольников окажется больше. Какое число должен назвать Миша, чтобы победить? Прямоугольники, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми. Например, прямоугольники 2×3 и 3×2 одинаковые.

Ответ: 212

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №6.1

Задание № 6.3

Условие:

Оксана и Серёжа играют в игру: сначала по очереди называют число от 1 до 165 (первой называет Оксана, числа должны быть разными). Затем каждый считает количество различных прямоугольников с целыми сторонами, периметр которых равен названному числу. Побеждает тот, у кого число прямоугольников окажется больше. Какое число должна назвать Оксана, чтобы победить? Прямоугольники, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми. Например, прямоугольники 2×3 и 3×2 одинаковые.

Ответ: 164

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №6.1

Задание № 6.4

Условие:

Дима и Влад играют в игру: сначала по очереди называют число от 1 до 97 (первым называет Дима, числа должны быть разными). Затем каждый считает количество различных прямоугольников с целыми сторонами, периметр которых равен названному числу. Побеждает тот, у кого число прямоугольников окажется больше. Какое число должен назвать Дима, чтобы победить? Прямоугольники, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми. Например, прямоугольники 2×3 и 3×2 одинаковые.

Ответ: 96

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №6.1

Задание № 7.1

Условие:

Преподаватель зельеварения Северус Снегг изготовил три зелья в одинаковом объёме — каждого по 300 мл. Первое зелье делает того, кто его выпьет, умным, второе — красивым, а третье — сильным. Для того, чтобы зелье подействовало, достаточно выпить хотя бы 30 мл этого зелья. Северус Снегг собрался выпить свои зелья, но тут его позвали к директору, и он ушел, оставив на своем столе подписанные зелья в больших кувшинах. Его отсутствием воспользовались Гарри, Гермиона и Рон. Они подошли к столу с зельями и начали их пробовать.

Первой зелья опробовала Гермиона: она подошла к первому кувшину с зельем ума и выпила из него половину, после чего перелила остаток во второй кувшин с зельем красоты, тщательно перемешала содержимое кувшина и выпила половину из него. Далее очередь перешла к Гарри: он выпил половину из третьего кувшина с зельем силы, а остаток перелил во второй кувшин, тщательно перемешал всё в этом кувшине и выпил из него половину. Теперь всё содержимое оказалось во втором кувшине, который и достался Рону.

Сколько процентов от содержимого этого кувшина ему нужно выпить, чтобы каждое из трёх зелий гарантированно на него подействовало?

Ответ: 80

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Сначала Гермиона пьёт 300/2 = 150 мл зелья ума, а 150 мл переливает во второй кувшин, после чего во втором кувшине становится 150 мл зелья ума и 300 мл зелья красоты. Когда она пьёт половину от содержимого этого кувшина, там остаётся 75 мл зелья ума и 150 мл зелья красоты. Теперь очередь Гарри. Он пьёт 300/2 = 150 мл зелья силы, а 150 мл переливает во второй кувшин. Там становится 75 мл зелья ума, 150 мл зелья красоты и 150 мл зелья силы. Когда Гарри выпивает оттуда половину, там остаётся 37.5 мл зелья ума, 75 мл зелья красоты и 75 мл зелья силы. Теперь очередь Рона.

По условию задачи, чтобы зелье начало действовать, достаточно выпить его в количестве хотя бы 30 мл. А значит, хотя бы 30 мл от зелья ума ему нужно выпить. И, поскольку зелья ума осталось меньше всего, то, если Рон выпьет от него 30 мл, все остальные зелья он выпьет в количестве гарантированно большем 30 мл. А значит, ему нужно выпить от кувшина долю, равную 30 мл / 37.5 мл * 100% = 80%.

Задание № 7.2

Условие:

Преподаватель зельеварения Северус Снегг изготовил три зелья в одинаковом объёме — каждого по 600 мл. Первое зелье делает того, кто его выпьет, умным, второе — красивым, а третье — сильным. Для того, чтобы зелье подействовало, достаточно выпить хотя бы 30 мл этого зелья. Северус Снегг собрался выпить свои зелья, но тут его позвали к директору, и он ушёл, оставив на своем столе подписанные зелья в больших кувшинах. Его отсутствием воспользовались Гарри, Гермиона и Рон. Они подошли к столу с зельями и начали их пробовать.

Первой зелья опробовала Гермиона: она подошла к первому кувшину с зельем ума и выпила из него половину, после чего перелила остаток во второй кувшин с зельем красоты, тщательно перемешала содержимое кувшина и выпила половину из него. Далее очередь перешла к Гарри: он выпил половину из третьего кувшина с зельем силы, а остаток перелил во второй кувшин, тщательно перемешал всё в этом кувшине и выпил из него половину. Теперь всё содержимое оказалось во втором кувшине, который и достался Рону.

Сколько процентов от содержимого этого кувшина ему нужно выпить, чтобы каждое из трёх зелий гарантированно на него подействовало?

Ответ: 40

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №7.1

Задание № 7.3

Условие:

Преподаватель зельеварения Северус Снегг изготовил три зелья в одинаковом объёме — каждого по 400 мл. Первое зелье делает того, кто его выпьет, умным, второе — красивым, а третье — сильным. Для того, чтобы зелье подействовало, достаточно выпить хотя бы 30 мл этого зелья. Северус Снегг собрался выпить свои зелья, но тут его позвали к директору, и он ушёл, оставив на своем столе подписанные зелья в больших кувшинах. Его отсутствием воспользовались Гарри, Гермиона и Рон. Они подошли к столу с зельями и начали их пробовать.

Первой зелья опробовала Гермиона: она подошла к первому кувшину с зельем ума и выпила из него половину, после чего перелила остаток во второй кувшин с зельем красоты, тщательно перемешала содержимое кувшина и выпила половину из него. Далее очередь перешла к Гарри: он выпил половину из третьего кувшина с зельем силы, а остаток перелил во второй кувшин, тщательно перемешал всё в этом кувшине и выпил из него половину. Теперь всё содержимое оказалось во втором кувшине, который и достался Рону.

Сколько процентов от содержимого этого кувшина ему нужно выпить, чтобы каждое из трёх зелий гарантированно на него подействовало?

Ответ: 60

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №7.1

Задание № 7.4

Условие:

Преподаватель зельеварения Северус Снегг изготовил три зелья в одинаковом объёме — каждого по 480 мл. Первое зелье делает того, кто его выпьет, умным, второе — красивым, а третье — сильным. Для того, чтобы зелье подействовало, достаточно выпить хотя бы 30 мл этого зелья. Северус Снегг собрался выпить свои зелья, но тут его позвали к директору, и он ушёл, оставив на своем столе подписанные зелья в больших кувшинах. Его отсутствием воспользовались Гарри, Гермиона и Рон. Они подошли к столу с зельями и начали их пробовать.

Первой зелья опробовала Гермиона: она подошла к первому кувшину с зельем ума и выпила из него половину, после чего перелила остаток во второй кувшин с зельем красоты, тщательно перемешала содержимое кувшина и выпила половину из него. Далее очередь перешла к Гарри: он выпил половину из третьего кувшина с зельем силы, а остаток перелил во второй кувшин, тщательно перемешал всё в этом кувшине и выпил из него половину. Теперь всё содержимое оказалось во втором кувшине, который и достался Рону. Сколько процентов от содержимого этого кувшина ему нужно выпить, чтобы каждое из трёх зелий гарантированно на него подействовало?

Ответ: 50

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №7.1

Задание № 8.1

Условие:

Дана доска 2022×2022. Оля и Маша поочерёдно закрашивают на ней квадраты 2×2 по сторонам клеток красным и синим цветами, причём девочки договорились, что каждую клетку можно покрасить не более одного раза в синий цвет и не более одного раза в красный. Клетки, покрашенные в синий, а потом в красный (и наоборот), становятся фиолетовыми. Как только все клетки стали покрашены, девочки посчитали, сколько среди них фиолетовых. Какие варианты у них могли получиться?

Варианты ответов:

- 2022·2022
- 2022·2021
- 2022·2020
- 2020·2020

Правильные ответы:

- 2022·2020
- 2020·2020

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение.

Обозначим количество фиолетовых клеток за x. Каждым ходом закрашивается квадрат 2×2, а значит, количество «закрашиваний» равно 4k, где k — количество ходов. С другой стороны, пусть x — количество фиолетовых клеток, то есть тех, которые девочки покрасили по два раза, значит на них ушло 2x «закрашиваний». Тогда клеток, покрашенных по одному разу — 2022·2022-x. Итого «закрашиваний» 2022·2022−x +2x =2022·2022+x. Таким образом мы посчитали количество «закрашиваний» двумя способами: 2022·2022+x = 4k.

Отсюда x =4(k-1011·1011). Значит x делится на 4. Таким образом, варианты 2022×2021, 2021×2021 отпадают. Кроме того, докажем, что все клетки также не могут быть фиолетовыми. Если это так, то каждую клетку мы покрасили дважды. Тогда посмотрим на последний закрашенный квадрат. Все его клетки уже были перед этим закрашены, а значит, и вся доска уже была покрашена, то есть в этот момент девочки уже перестали красить клетки. Таким образом, вариант 2022×2022 отпадает. Заметим, что любое другое число вида $4k$ возможно. Разобьём доску на квадраты, всего их $1011 \cdot 1011$. Тогда Маша может k раз повторять действия Оли, таким образом, k квадратов станут фиолетовыми. Затем по очереди будут красить оставшиеся $1011 \cdot 1011 - k$ (каждая по одному квадрату).

Задание № 8.2

Условие:

Дана доска 2022×2022. Максим и Андрей поочерёдно закрашивают на ней квадраты 2×2 по сторонам клеток жёлтым и красным цветами, причём мальчики договорились, что каждую клетку можно покрасить не более одного раза в синий цвет и не более одного раза в красный. Клетки, покрашенные в жёлтый, а потом в красный (и наоборот), становятся оранжевыми. Как только все клетки стали покрашены, мальчики посчитали, сколько среди них оранжевых. Какие варианты у них могли получиться?

Варианты ответов:

- 2022·2022
- 2022·2021
- 2021·2020
- 2022·2020

Правильные ответы:

- 2021·2020
- 2022·2020

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №8.1

Задание № 8.3

Условие:

Дана доска 2022×2022. Лиза и Варя поочерёдно закрашивают на ней квадраты 2×2 по сторонам клеток красным и синим цветами, причём девочки договорились, что каждую клетку можно покрасить не более одного раза в синий цвет и не более одного раза в красный. Клетки, покрашенные в синий, а потом в красный (и наоборот), становятся фиолетовыми. Как только все клетки стали покрашены, девочки посчитали, сколько среди них фиолетовых. Какие варианты у них могли получиться?

Варианты ответов:

- $2022 \cdot 2022$
- $2022 \cdot 2020$
- $2021 \cdot 2022$
- $2021 \cdot 2020$

Правильные ответы:

- $2022 \cdot 2020$
- $2021 \cdot 2020$

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №8.1

Задание № 8.4

Условие:

Дана доска 2022×2022. Егор и Матвей поочерёдно закрашивают на ней квадраты 2×2 по сторонам клеток красным и жёлтым цветами, причём мальчики договорились, что каждую клетку можно покрасить не более одного раза в синий цвет и не более одного раза в красный. Клетки, покрашенные в жёлтый, а потом в красный (и наоборот), становятся оранжевыми. Как только все клетки стали покрашены, мальчики посчитали, сколько среди них оранжевых. Какие варианты у них могли получиться?

Варианты ответов:

- 2022·2021
- 2022·2020
- 2021·2020
- 2022·2022

Правильные ответы:

- 2022·2020
- 2021·2020

Точное совпадение ответа — 1 балл

Решение по аналогии с заданием №8.1